

MATHS ET BANDE DESSINEE

A Lecture dirigée des extraits de la bande dessinée

- Tableau récapitulatif

n° page de la BD	Date	informations de type descriptif	informations de type quantitatif
17	24 juin	- apparition du cube - simple structure cubique totalement vide	arête = 15 cm
25		pointes qui prolongent chacune des extrémités de l'hexaèdre	
28	25 juin 9h50	le cube a bien grandi	
32		amorces d'un treillis	prolongements de 6 ou 7 cm
33		.l'ensemble se développe de manière symétrique .prolongements de même longueur .absolue régularité de la progression	on distingue sur le brouillon de Robick : • 25 juin 9h30 : arête = 20 cm $U_3 = 63$ $U_4 = 129$ • ébauche de formule donnant U_n
38	26 juin	le réseau s'est développé autour de Robick, l'emprisonnant dans l'échafaudage qu'il venait de former	3 heures d'attente pour que le bras de Robick soit dégagé
46		Séance exceptionnelle à l'Académie Il est possible de prévoir heure par heure l'évolution du phénomène	$U_n = 2n+1 + 4 [1(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \dots + (n-2).5 + (n-1).3 + n.1]$
47		imaginer U_{20} , U_{30} , U_{50} hypothèse d'une matière auto-génératrice	$U_3 = 63$ $U_5 = 231$ $U_8 = 833$ $U_{10} = 1561$
67		le mot de la fin "on finit toujours par trouver une solution"...	

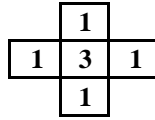
- U_n représente le nombre de cubes du réseau à la $n^{\text{ième}}$ génération.

B Préviation du phénomène - Mise en équation

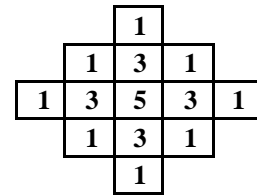
a



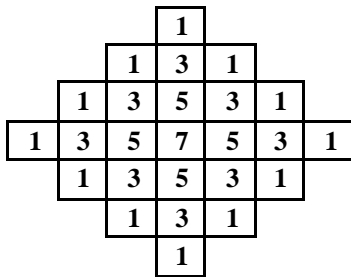
Cube initial
 $U_0=1$



Réseau de première génération
 $U_1=1 \times 3 + 4 \times 1$
 $U_1=7$



Réseau de seconde génération
 $U_2=1 \times 5 + 4 \times 3 + 8 \times 1$
 $U_2= 25$



Réseau de troisième génération

$$U_3=1 \times 7 + 4 \times 5 + 8 \times 3 + 12 \times 1$$

$$U_3= 63$$

conjecture :

$$U_n= 1 \cdot (2n+1) + 4(2n-1) + 8(2n-3) + 12(2n-5) + \dots + 4n[2n - (2n-1)]$$

$$U_n= 2n+1 + 4 [1 \cdot (2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \dots + n[2n - (2n-1)]]$$

$$U_n= 2n+1 + 4 [\overset{i}{1} \times (2n - (2 \times 1 - 1))$$

$$+ 2 \times (2n - (2 \times 2 - 1))$$

$$+ 3 \times (2n - (2 \times 3 - 1))$$

$$+ \dots$$

$$+ \dots$$

$$+ n \times (2n - (2 \times n - 1))]$$

On a donc conjecturé une relation

du type :

$$U_n= 2n+1 + 4 \sum_{i=1}^n i [2n - (2i - 1)]$$

b La relation que nous venons de conjecturer :

$$U_n = 2n+1 + 4 \sum_{i=1}^n i [2n - (2i - 1)] , \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

permet de retrouver au passage la formule de Robick exposée devant l'Académie, lors d'une séance exceptionnelle (p 46) :

$$U_n = 2n+1 + 4 [1(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \dots + (n-2).5 + (n-1).3 + n.1]$$

Reprenons la relation \boxed{R} , elle s'écrit encore :

$$U_n = 2n+1 + 4 \sum_{i=1}^n [i(2n+1) - 2i^2] , \text{ c'est à dire : } U_n = 2n+1 + 4(2n+1) \sum_{i=1}^n i - 8 \sum_{i=1}^n i^2$$

Comme :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ,$$

on obtient :

$$U_n = 2n+1 + 4(2n+1) \frac{n(n+1)}{2} - 8 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ainsi,

$$U_n = (2n+1) [1 + 2n(n+1) - \frac{4}{3} n(n+1)] \quad \text{ie } U_n = (2n+1) [1 + (2 - \frac{4}{3}) n(n+1)]$$

$$\text{cad } U_n = (2n+1) [1 + \frac{2}{3} n(n+1)]$$

Soit :

$$\boxed{U_n = (2n+1) \frac{2n^2+2n+3}{3}}$$

c Tableau des onze premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Un	1	7	25	63	129	231	377	575	833	1159	1561

Répondons alors à l'invitation de Robick page 47 :

$$U_{20} = (2 \times 20 + 1) \frac{2 \times 20^2 + 2 \times 20 + 3}{3} = 11521 \text{ cubes}$$

$$U_{30} = (2 \times 30 + 1) \frac{2 \times 30^2 + 2 \times 30 + 3}{3} = 37881 \text{ cubes}$$

et $U_{50} = 171801$ cubes

C Un peu de schémas dans l'espace

a Réseau de première génération

b Réseau de seconde génération Voir dessin Cabri et géomètre

L'enveloppe du réseau est un volume à huit faces, soit un octaèdre. On pourrait l'appeler le cube-octaèdre.

Noms imaginés par les élèves :

- génération "cubandoctèdre"
- génération "cubicandoctaédrienne"
- réseau de Robick
- Robick - cube
- l' "octaréseau"

D Evolution des arêtes des cubes

a Cas de figure où les arêtes sont de longueur constante a_0

Nombre de cubes sur la diagonale [AC] du réseau à la $n^{\text{ième}}$ génération : $2n + 1$

on a donc : $a_0 (2n+1) \leq AC$

$$n \leq \frac{1}{2} \frac{AC}{a_0} - 1$$

AN $AC = 10 \text{ Km}$, $a_0 = 15 \text{ cm} = 15 \cdot 10^{-5} \text{ Km}$; soit $n \leq 33\,332,8$

Ainsi, si l'évolution des arêtes des cubes est supposée constante, la progression du réseau aura stoppé lorsque $n = 33\,333$, soit à la $33\,333^{\text{ième}}$ génération .

b En fait, les descriptions de Robick nous laissent imaginer que **l'arête du cube initial suit une progression géométrique.**

- $a_0 = 15 \text{ cm}$
- l'arête a_1 des cubes de la première génération est $a_1 = 20 \text{ cm}$

la raison de cette progression géométrique est alors :

$$r = \frac{a_1}{a_0} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

conclusion : les arêtes des cubes suivent une progression géométrique de premier terme $a_0 = 15 \text{ cm}$, de raison $\frac{4}{3}$.

L'arête a_n des cubes du réseau de la $n^{\text{ième}}$ génération s'écrit donc :

$$a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n a_0$$

Ainsi, le réseau aura recouvert l'ensemble de la ville lorsque :

$$a_n (2n+1) \leq AC$$

soit : $\left(\frac{4}{3}\right)^n a_0 (2n+1) \leq AC$

soit : $(2n+1) \frac{4^n}{3} \frac{AC}{a_0}$

comme $AC = 10 \text{ Km} = 10^6 \text{ cm}$, la progression s'arrêtera à partir de la génération n_0 pour laquelle on a :

$$(2n+1) \frac{4^n}{3} \frac{10^6}{a_0} \leq AC \quad (\text{avec } a_0 \text{ en cm})$$

En appelant w la suite de terme général :

$$w_n = (2n+1) \frac{4^n}{3}, n \geq 1, \text{ un programme à la calculatrice permet d'obtenir}$$

:

$$w_{24} = 48\,834 \text{ et } w_{25} = 67\,770. \text{ Mais } \frac{10^6}{a_0} = 66\,667 \text{ donc } n_0 = 25.$$

La progression s'arrêtera donc à la 25^{ième} génération .

C Volume du réseau et de son enveloppe lorsque $n = n_0$

• Soit V_n le volume du réseau à la $n^{\text{ième}}$ génération .

$$V_n = \underbrace{U_n}_{\text{nb de cubes}} \cdot \underbrace{a_n^3}_{\text{vol. d'1 cube}}$$

Ainsi,
$$V_n = a_0^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^n \cdot U_n$$

AN $n = n_0 = 25$ $U_{25} = (2 \times 25 + 1) \frac{2 \times 25^2 + 2 \times 25 + 3}{3} = 22\,151$ cubes

$$V_{25} = (15 \cdot 10^{-5})^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^{25} \cdot 22151$$

$$V_{25} = 175,417 \text{ Km}^3$$

• Soit V_e le volume de l'enveloppe .

l'enveloppe étant une double pyramide, $V_e = 2 \left(\frac{1}{3} \text{ Base} \times \text{hauteur} \right)$

Base = $\frac{A^2}{2}$ où A est la diagonale du carré de base de l'enveloppe

$$A = AC + 1 \cdot a_{n_0} = (2n_0 + 2) a_{n_0}$$

et hauteur = $\frac{A}{2}$

ainsi $V_e = 2 \left(\frac{1}{3} \frac{A^2}{2} \times \frac{A}{2} \right)$ soit $V_e = \frac{A^3}{6}$

AN $A = 52 \times a_{25} = 52 \times 15 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{4}{3}^{25}$ Km d'où $A = 10,36485$ Km

et $V_e = 185,583 \text{ Km}^3$.

Le volume de l'enveloppe et celui du réseau ont même ordre de grandeur : d'une manière grossière, deux centaines de kilomètres-cubes.

De plus, on pourrait montrer que plus n sera grand, plus l'écart $V_e - V_n$ sera petit.