Lecture mathématique de la bande dessinée **1S1**
de Schuiten et Peeters ***La fièvre d'Urbicande***
correction

MATHS ET BANDE DESSINEE

A Lecture dirigée des extraits de la bande dessinée

· Tableau récapitulatif

n° page de la BD	Date	informations de type descriptif	informations de type quantitatif
17	24 juin	- apparition du cube - simple structure cubique totalement vide	arête = 15 cm
25		pointes qui prolongent chacune des extrémités de l'hexaèdre	
28	25 juin 9h50	le cube a bien grandi	
32		amorce d'un treillis	prolongements de 6 ou 7 cm
33		.l'ensemble se développe de manière symétrique .prolongements de même longueur .absolue régularité de la progression	on distingue sur le brouillon de Robick : · 25 juin 9h30 : arête = 20 cm U_3= 63 U_4= 129 · ébauche de formule donnant U_n
38	26 juin	le réseau s'est développé autour de Robick, l'emprisonnant dans l'échafaudage qu'il venait de former	3 heures d'attente pour que le bras de Robick soit dégagé
46		Séance exceptionnelle à l'Académie Il est possible de prévoir heure par heure l'évolution du phénomène	U_n= 2n+1 + 4 [1(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + ... + (n-2).5 + (n-1).3+ n.1]
47		imaginer U_{20} ,U_{30} ,U_{50} hypothèse d'une matière auto-génératrice	U_3= 63 U_5= 231 U_8= 833 U_{10}= 1561
67		le mot de la fin "on finit toujours par trouver une solution"...	

· U_n représente le nombre de cubes du réseau à la $n^{ième}$ génération.

$\boxed{B}$ Prévision du phénomène - Mise en équation

$\boxed{a}$

1

Cube initial

$U_0=1$

	1	
1	3	1
	1	

Réseau de première génération

$U_1=1x3 + 4x1$

$U_1=7$

		1		
	1	3	1	
1	3	5	3	1
	1	3	1	
		1		

Réseau de seconde génération

$U_2=1x5 + 4x3 + 8x1$

$U_2= 25$

			1			
		1	3	1		
	1	3	5	3	1	
1	3	5	7	5	3	1
	1	3	5	3	1	
		1	3	1		
			1			

Réseau de troisième génération

$U_3=1x7 + 4x5 +8x3 +12x1$

$U_3= 63$

<u>conjecture</u> :

$U_n= 1.(2n+1) + 4(2n-1) +8(2n-3) + 12(2n-5) + ... + 4n[2n - (2n-1)]$

$U_n= 2n+1 + 4 [1.(2n-1) +2(2n-3) + 3(2n-5) + ... + n[2n - (2n-1)]]$

$$U_n= 2n+1 + 4 [\ \overset{\boxed{i}}{1} \times (2n - (2\times\overset{\boxed{i}}{1} - 1))$$
$$+ 2 \times (2n - (2\times2 - 1))$$
$$+ 3 \times (2n - (2\times3 - 1))$$
$$+ ...$$
$$+ ...$$
$$+ n \times (2n - (2\times n - 1)) \ ]$$

On a donc conjecturé une relation du type :

$$U_n= 2n+1 + 4 \sum_{i=1}^{n} i [2n -(2i -1)]$$

$\boxed{b}$ La relation que nous venons de conjecturer :

$$U_n = 2n+1 + 4 \sum_{i=1}^{n} i\,[\,2n - (2i - 1)\,]\text{ , pour tout } n \geq 1 \boxed{R}$$

permet de retrouver au passage la formule de Robick exposée devant l'Académie, lors d'une séance exceptionnelle (p 46) :
$U_n = 2n+1 + 4\,[\,1(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + ... + (n-2).5 + (n-1).3 + n.1\,]$

Reprenons la relation $\boxed{R}$, elle s'écrit encore :

$$U_n = 2n+1 + 4 \sum_{i=1}^{n} [\,i\,(2n + 1) - 2i^2\,]\text{ , c'est à dire : } U_n = 2n+1 + 4\,(2n+1) \sum_{i=1}^{n} i - 8 \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Comme :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{ ,}$$

on obtient :

$$U_n = 2n+1 + 4\,(2n+1)\,\frac{n(n+1)}{2} - 8\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ainsi,

$$U_n = (2n+1)\,[\,1 + 2n(n+1) - \frac{4}{3}\,n(n+1)\,] \quad \text{ie} \quad U_n = (2n+1)\,[\,1 + (2 - \frac{4}{3})\,n(n+1)\,]$$

cad $U_n = (2n+1)\,[\,1 + \frac{2}{3}\,n(n+1)\,]$

Soit :

$$\boxed{U_n = (2n+1)\,\frac{2n^2+2n+3}{3}}$$

$\boxed{c}$ Tableau des onze premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Un	1	7	25	63	129	231	377	575	833	1159	1561

Répondons alors à l'invitation de Robick page 47 :

$$U_{20} = (2x20 + 1)\,\frac{2x20^2 + 2x20 + 3}{3} = 11521 \text{ cubes}$$

$$U_{30} = (2x30 + 1)\,\frac{2x30^2 + 2x30 + 3}{3} = 37881 \text{ cubes}$$

et $U_{50} = 171801$ cubes

$\boxed{C}$ **Un peu de schémas dans l'espace**

$\boxed{a}$ Réseau de première génération b Réseau de seconde génération Voir dessin Cabri et géomètre

L'enveloppe du réseau est un volume à huit faces, soit un <u>octaèdre</u>. On pourrait l'appeler le cube-octaèdre.

Noms imaginés par les élèves :

- génération "cubandoctèdre"
- génération "cubicandoctaèdrienne"
- réseau de Robick
- Robick - cube
- l' "octaréseau"

D Evolution des arêtes des cubes

a Cas de figure où les arêtes sont de longueur constante a_0

Nombre de cubes sur la diagonale [AC] du réseau à la $n^{ième}$ génération : $\boxed{2n+1}$

on a donc : $a_0\,(2n+1) \geq AC$

$$n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{a_0} - 1\right)$$

AN AC = 10 Km , a_0 = 15 cm = 15.10^{-5} Km ; soit $n \geq 33\,332{,}8$

Ainsi, si l'évolution des arêtes des cubes est supposée constante, la progression du réseau aura stoppé lorsque n = 33 333, soit à la $33\,333^{ième}$ génération .

b En fait, les descriptions de Robick nous laissent imaginer que **l'arête du cube initial suit une progression géométrique.**

- a_0 = 15 cm
- l'arête a_1 des cubes de la première génération est a_1 = 20 cm

la raison de cette progression géométrique est alors :

$$r = \frac{a_1}{a_0} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

conclusion : les arêtes des cubes suivent une progression géométrique de premier terme a_0 = 15 cm, de raison $\frac{4}{3}$.

L'arête a_n des cubes du réseau de la $n^{ième}$ génération s'écrit donc :

$$a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n a_0$$

Ainsi, le réseau aura recouvert l'ensemble de la ville lorsque :

$$a_n\,(2n+1) \geq AC$$

soit : $$\left(\frac{4}{3}\right)^n a_0\,(2n+1) \geq AC$$

soit : $$(2n+1)\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq \frac{AC}{a_0}$$

comme AC = 10 Km = 10^6 cm, la progression s'arrêtera à partir de la génération n_0 pour laquelle on a :

$$(2n+1)\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq \frac{10^6}{a_0} \qquad \text{(avec } a_0 \text{ en cm)}$$

En appelant w la suite de terme général :

$w_n = (2n+1)\left(\frac{4}{3}\right)^n$, $n \geq 1$, un programme à la calculatrice permet d'obtenir :

$w_{24} = 48\,834$ et $w_{25} = 67\,770$. Mais $\frac{10^6}{a_0} \approx 66\,667$ donc $n_0 = 25$.

La progression s'arrêtera donc à la $25^{\text{ième}}$ génération .

$\boxed{c}$ **Volume du réseau et de son enveloppe lorsque n = n_0**

· Soit V_n le volume du réseau à la $n^{ième}$ génération .

$$V_n = \underbrace{U_n}_{\text{nb de cubes}} \;.\; \underbrace{a_n^3}_{\text{vol. d'1 cube}}$$

Ainsi, $$\boxed{V_n = a_0^3 \left(\frac{4}{3}\right)^{3n} U_n}$$

$\boxed{AN}$ $n = n_0 = 25$ $\quad U_{25} = (2x25 + 1)\dfrac{2x25^2 + 2x25 + 3}{3} = 22\,151$ cubes

$$V_{25} = (15.10^{-5})^3 . \left(\frac{4}{3}\right)^{3x25} x22151$$

$$\boxed{V_{25} = 175{,}417\ Km^3}$$

· Soit V_e le volume de l'enveloppe .

l'enveloppe étant une double pyramide, $V_e = 2\left(\frac{1}{3}\text{ Base x hauteur}\right)$

Base = $\dfrac{A^2}{2}$ où A est la diagonale du carré de base de l'enveloppe

$A = AC + 1.a_{n_0} = (2n_0 + 2)\ a_{n_0}$

et hauteur = $\dfrac{A}{2}$

ainsi $V_e = 2\left(\dfrac{1}{3}\,\dfrac{A^2}{2} \text{ x } \dfrac{A}{2}\right)$ soit $\boxed{V_e = \dfrac{A^3}{6}}$

$\boxed{AN}$ $A = 52 \text{ x } a_{25} = 52x\ 15.10^{-5}.\left(\frac{4}{3}\right)^{25}$ Km d'où A = 10,36485 Km

et $\boxed{V_e = 185{,}583\ Km^3}$.

Le volume de l'enveloppe et celui du réseau ont même ordre de grandeur : d'une manière grossière, deux centaines de kilomètres-cubes.
De plus, on pourrait montrer que plus n sera grand, plus l'écart V_e - V_n sera petit.